

УДК 519.866:332.7

DOI: <https://doi.org/10.30838/EP.207.221-235>**Бойчук М.В.**

кандидат фізико-математичних наук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Boychuk Myroslav

PhD in Physic and Mathematic Sc.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

<https://orcid.org/0009-0003-9391-8290>**Скрашук Л.В.**

кандидат економічних наук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Skraschuk Larisa

PhD in Economic Sc.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

<https://orcid.org/0000-0001-7842-1540>**Вінничук О.Ю.**

кандидат економічних наук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Vinnychuk Olena

PhD in Economic Sc.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

<https://orcid.org/0000-0001-5354-3429>

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИНАМІКОЮ АГРЕГОВАНОЇ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНОЇ ПРОДУКЦІЇ З ВВЕДЕННЯМ ДОПОМІЖНОГО ВИРОБНИЦТВА

У представленій статті побудовано стохастичну модель оптимального керування динамікою агрегованої еколого-економічної продукції, яка є розширенням моделі Леонтьєва-Форда, з введенням допоміжного виробництва по переробці забруднювачів та виробництва додаткової продукції. У роботі використано метод агрегування цінами, як спосіб зведення багатофакторних міжгалузевих моделей до простіших агрегованих еквівалентів, що дозволило провести аналіз стохастичних динамічних міжгалузевих балансів.

Розроблена стохастична модель ідентифікує три основні типи керування відносним обсягом виробничого нагромадження, що відповідають трьом ключовим еколого-економічним режимам. Ці режими є основою для формування багаторусних оптимальних процесів, забезпечуючи можливість вибору пріоритетного оптимального режиму для управління системою. Визначено довірчі проміжки для реальних багаторусних оптимальних траєкторій.

Ключові слова: оптимальне керування, агрегована еколого-економічна продукція, допоміжне виробництво, додаткова продукція, стохастична модель.

STOCHASTIC MODEL FOR OPTIMAL CONTROL OF AGGREGATED ECOLOGICAL–ECONOMIC OUTPUT WITH AUXILIARY PRODUCTION

The study of optimizing the dynamics of ecological-economic systems and developing optimal management strategies for these systems requires an integrated approach that combines economic and environmental processes. The need to minimize anthropogenic impact on the environment, which is a key paradigm of sustainable development, determines the focus of scientific inquiry. This creates the necessity to model the processes of pollutant utilization, which are by-products of the main production activity, while simultaneously generating auxiliary output. Given the stochastic nature of economic processes, the study of the functioning of such environmentally oriented systems with the inclusion of auxiliary production

ISSN друкованої версії: 2224-6282

ISSN електронної версії: 2224-6290

© Бойчук М.В., Скрашук Л.В., Вінничук О.Ю., 2025

becomes increasingly important both theoretically and practically.

Based on a modification of the deterministic Leontief–Ford model, a stochastic optimal dynamic model of intersectoral ecological–economic interaction was developed. The model was expanded to incorporate an auxiliary production process that carries out pollutant utilization while simultaneously generating auxiliary output. This extended intersectoral system was formalized as a stochastic algebraic–differential model in the Itô form, where stochastic dynamics are represented through Wiener and Poisson processes. To simplify further analysis, the price aggregation method was applied, which made it possible to reduce the multidimensional model to its one-dimensional aggregated equivalent, provided that Frobenius left vectors are used to ensure exact aggregation.

The optimal control problem consisted in determining such a relative volume of productive accumulation that maximizes the expected integral discounted aggregated final output. To solve this problem, stochastic sufficient optimality conditions were applied, in particular the Bellman equation. The analysis revealed that the developed stochastic model operates under three discrete control regimes for the relative volume of productive accumulation. These regimes form the basis for constructing multilevel optimal ecological–economic processes.

The developed research methodology makes it possible to select, from a set of potential multilevel regimes, a priority optimal process for which both averaged and stochastic trajectories have been constructed. In particular, a two-level optimal process was built for the selected regime. Additionally, determining confidence intervals for the actual optimal trajectories at a given confidence level provides a quantitative assessment of the risks associated with implementing economic strategies.

Keywords: optimal control, aggregated ecological and economic production, auxiliary production, additional production, stochastic model.

JEL classification: C67.

Постановка проблеми. Оптимізація функціонування еколого-економічних систем у контексті сталого розвитку вимагає розробки адекватних математичних моделей, що здатні інтегрувати динаміку економічних показників із чинниками навколишнього середовища. Фундаментальні основи цих процесів обумовлюють необхідність комплексного дослідження взаємодії виробничих галузей та сфери утилізації забруднень, а також їхнього впливу на макроекономічну динаміку. Наростаюча невизначеність та стохастична природа економічних і екологічних змінних (цін, витрат, обсягів забруднення) вимагають переходу від детермінованих моделей до стохастичного аналізу. Нагальною проблемою є не лише мінімізація негативного впливу, але й ефективне економічне використання побічних продуктів переробки забруднювачів.

Гіпотезою проведеного дослідження є наступне твердження: ефективне оптимальне керування динамікою агрегованої еколого-економічної кінцевої продукції, що включає допоміжне виробництво з переробки забруднювачів та отриманням додаткової продукції, може бути досягнуте шляхом розробки та застосування стохастичної алгебраїчно-диференціальної моделі у формі Іто. Ця модель, інтегрована з інструментами стохастичного оптимального керування (зокрема, рівнянням Беллмана), дозволить не лише адекватно відобразити випадковість системи, але й ідентифікувати багаторісні оптимальні еколого-економічні режими, підвищуючи тим самим точність прогнозування та якості стратегічних рішень в умовах невизначеності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивчення наукового доробку з проблематики дослідження еколого-економічних систем засвідчує стійкий інтерес до використання моделей міжгалузевого балансу для інтегрованого аналізу, а також до застосування теорії оптимального керування для визначення

ефективних стратегій сталого розвитку. Зокрема, у роботі Ляшенко О., Хрущ Л. [1] представлено модифікацію статичної еколого-економічної моделі Леонтьєва-Форда, яка включає нову галузь по переробці парникових газів, що дозволяє досягти динамічного еколого-економічного балансу та гармонізації критеріїв розвитку «природа-виробництво». На основі цієї моделі, шляхом проведення розрахунків із застосуванням реальних даних, виведено явні аналітичні формули для оцінки величини екологічного податку, що корелює із рівнем забруднення технології, і забезпечує перевагу перед існуючими методами розрахунку плати за забруднення.

Дослідження Білоскурського Р.Р. та ін. [2] присвячене екологічно розширеним таблицям “витрати-випуск”, де модель Леонтьєва-Форда виступає базовим методологічним інструментом, що узагальнює класичну модель Леонтьєва на первинні (матеріальне виробництво) та вторинні (знищення забруднювачів) галузі. Аналіз галузевої структури, проведений на прикладі поточної ситуації в Україні, обґрунтовує необхідність розробки регіональних концепцій еколого-економічного розвитку, які мають базуватися на макроекономічній стратегії з пріоритетом формування екологічної економіки та поступовою мінімізацією ресурсоемності і утворення відходів.

У роботі Скращук Л. [3] проводиться дослідження розробленої агрегованої моделі оптимального керування збалансованими еколого-економічними системами, яка спрямована на максимізацію цільового функціоналу, що відображає сумарну інтегральну величину чистого доходу від кінцевої продукції. Ця модель суттєво розширює сучасний економіко-математичний апарат для аналізу еколого-економічної взаємодії та обґрунтування оптимальних управлінських рішень. Модель формалізується як задача оптимального

керування, яка задовольняє умови динамічного еколого-економічного балансу, невід'ємності обсягів основного та допоміжного виробництва, а також обмеження «незворотності» капіталовкладень, і вирішується за допомогою принципу максимуму. У роботі Бойчука М., Скращук Л. [4] – побудовано та досліджено стохастичну модель оптимальної агрегованої еколого-економічної кінцевої продукції з допомогою використання вінерівських і пуассонівських процесів без введення допоміжного виробництва по переробці забруднювачів та виготовленні допоміжної продукції. При цьому для дослідження використовувались стохастичні достатні умови оптимальності.

Незважаючи на значний науковий доробок у сфері моделювання еколого-економічних систем, в існуючих роботах залишаються критичні методологічні питання, які вимагають подальшого аналізу. Зокрема, існуючі моделі або є детермінованими, що ігнорує стохастичну природу економічних ризиків і невизначеності, або, будучи стохастичними, не інтегрують явно функціонування допоміжного виробництва по переробці забруднювачів та отримання додаткової продукції. Таким чином, визначено потребу у розробці стохастичної моделі оптимального керування, яка б синтезувала фактор допоміжного виробництва та дозволяла будувати багаторисні оптимальні процеси, що є критично

важливим для підвищення ефективності стратегічних рішень в умовах невизначеності.

Мета дослідження: розробити стохастичну оптимальну динамічну модель міжгалузевої еколого-економічної взаємодії з введенням допоміжного виробництва та виготовлення допоміжної продукції, побудувати її агрегований еквівалент за допомогою вінерівських і пуассонівських процесів та провести її дослідження. Зауважимо, що в роботі [5] наведено економічне обґрунтування використання вінерівських процесів у стохастичному моделюванні. Закон розподілу ймовірностей для вінерівського процесу невідомий, зате приріст підпорядкований нормальному (гауссівському) закону розподілу [6]. А пуассонівський процес підпорядкований пуассонівському закону розподілу [6]. Слід нагадати, що пуассонівський закон розподілу є нормальним законом розподілу при малих ймовірностях (рідкісні події). Для дослідження запропонованої оптимальної еколого-економічної міжгалузевої моделі необхідно використати стохастичні достатні умови оптимальності [7].

Виклад основних результатів дослідження. По аналогії з моделлю Леонтьєва-Форда [8] запишемо детерміновану модель еколого-економічного балансу з введенням допоміжного виробництва переробки забруднювачів по виробництву допоміжної продукції

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + A_{13}x_3(t) + B_{11}\dot{x}_1(t) + B_{12}\dot{x}_2(t) + B_{13}\dot{x}_3(t) + y_1(t), \\ x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + A_{23}x_3(t) + B_{21}\dot{x}_1(t) + B_{22}\dot{x}_2(t) + B_{23}\dot{x}_3(t) + y_2(t), \\ x_3(t) = A_{31}x_1(t) + A_{32}x_2(t) + A_{33}x_3(t) - y_3(t), \end{cases} \quad (1)$$

де t – змінна часу $[T > t_0 \geq 0]$,

$x_1 \in \square_+^n$ – вектор основного валового виробництва;

$x_2 \in \square_+^m$ – вектор допоміжного валового виробництва;

$x_3 \in \square_+^l$ – вектор знищених забруднювачів;

$y_1 \in \square_+^n$ – вектор кінцевої продукції основного виробництва;

$y_2 \in \square_+^m$ – вектор кінцевої продукції допоміжного виробництва;

$y_3 \in \square_+^l$ – вектор незнищених забруднювачів, тобто вектор обсягів забруднювачів, які у даний час не можуть перероблятися у зв'язку з відсутністю технологій;

$A_{11} = \left(a_{ij}^{(11)} \right)_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця витрат i -ої продукції на випуск одиниці j -ої основної продукції;

$A_{12} = \left(a_{ij}^{(12)} \right)_{i,j=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат i -ої продукції на одиницю j -ої допоміжної продукції;

$A_{13} = \left(a_{ij}^{(13)} \right)_{i,j=1}^{n,l}$ – прямокутна матриця витрат i -ої продукції на знищення одиниці j -го забруднення;

$A_{21} = \left(a_{ij}^{(21)} \right)_{i,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця випуску i -ої допоміжної продукції під час випуску одиниці j -ої

основної продукції;

$A_{22} = \left(a_{ij}^{(22)} \right)_{i,j=1}^m$ – квадратна матриця витрат i -ої допоміжної продукції на випуск одиниці j -ої допоміжної

продукції;

$A_{23} = \left(a_{ij}^{(23)} \right)_{i,j=1}^{m,l}$ – прямокутна матриця витрат i -ої допоміжної продукції на переробку одиниці j -го забруднювача;

днювача;

$A_{31} = \left(a_{ij}^{(31)} \right)_{i,j=1}^{l,n}$ – прямокутна матриця випуску i -го забруднювача під час випуску одиниці j -ої основної

продукції;

$A_{32} = \left(a_{ij}^{(32)} \right)_{i,j=1}^{l,m}$ – прямокутна матриця випуску i -го забруднювача під час випуску одиниці j -ої допоміжної

продукції;

$A_{33} = \left(a_{ij}^{(33)} \right)_{i,j=1}^l$ – квадратна матриця випуску i -го забруднювача під час переробки одиниці j -го забруднювача;

нювача;

$\dot{x}(t) \equiv \frac{d}{dt} x(t)$ – похідна за часом t ;

$\dot{x}_1(t) = \left(\dot{x}_1^{(1)}(t), \dots, \dot{x}_n^{(1)}(t) \right)'$ – вектор абсолютних приростів основного виробництва,

“ $'$ ” – операція транспонування матриць;

$\dot{x}_2(t) = \left(\dot{x}_1^{(2)}(t), \dots, \dot{x}_m^{(2)}(t) \right)'$ – вектор абсолютних приростів допоміжного виробництва;

$\dot{x}_3(t) = \left(\dot{x}_1^{(3)}(t), \dots, \dot{x}_k^{(3)}(t) \right)'$ – вектор абсолютних приростів знищених забруднювачів;

$B_{11} = \left(b_{ij}^{(11)} \geq 0 \right)_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва під час випуску основної продукції;

тва під час випуску основної продукції;

$B_{12} = \left(b_{ij}^{(12)} \right)_{i,j=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва

під час випуску допоміжної продукції;

$B_{13} = \left(b_{ij}^{(13)} \right)_{i,j=1}^{n,l}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва під час випуску основної продукції;

тва під час випуску основної продукції;

$B_{21} = \left(b_{ij}^{(21)} \right)_{i,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва під час випуску основної продукції;

тва під час випуску основної продукції;

$B_{22} = \left(b_{ij}^{(22)} \right)_{i,j=1}^m$ – квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва під час випуску допоміжної продукції;

під час випуску допоміжної продукції;

$B_{23} = \left(b_{ij}^{(23)} \geq 0 \right)_{i,j=1}^{m,l}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів обсягів переробки забруднювачів під час випуску допоміжної продукції;

забруднювачів під час випуску допоміжної продукції;

$\square^k$ – k -вимірний простір дійсних чисел; $\square_+^k$ – невід’ємний ортант простору $\square^k$.

Елементи наведених матриць $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{21}, B_{22}, B_{23}$ та компоненти векторів $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ є невід’ємними за визначенням. Формалізуємо стохастичну модель, базуючись на співвідношеннях (1).

Нехай $\{\Omega, S, P\}$ ймовірнісний простір із σ -алгеброю $S_t \subset \sigma, t \in [t_0, T]$, із множиною елементарних подій Ω та мірою (ймовірністю) P ; вектори $\xi^{(1)}(t) \in \square^n, \xi^{(2)}(t) \in \square^m - S_t$ – вимірні вектори стандартних вінерівських процесів: закон розподілу ймовірностей для самих вінерівських процесів невідомий, а відомо, що приріст (похідна $\dot{\xi}(t)$ або диференціал $d\xi(t)$) вінерівського процесу підпорядкований нормальному (гауссівському) закону розподілу з нульовим математичним сподіванням приросту

та одиничною дисперсією приросту вінерівського процесу, $t \in [t_0, T], \omega \in \Omega$ [6]; вектори $\eta^{(1)}(t) \in \square^n, \eta^{(2)}(t) \in \square^m$ – вектори пуассонівських процесів із математичним сподіванням $M\eta^{(i)}(t) = \rho^{(i)}(t - t_0), t \in [t_0, T], \omega \in \Omega$ [6], $\rho^{(i)}$ – сталий вектор, $i = \overline{1, 2}$; вектори випадкових процесів $\xi^{(i)}(t)$ і $\eta^{(i)}(t), i = \overline{1, 2}$ – незалежні.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, S, P\}$ задані вектори випадкових процесів $X^{(1)}(t) \equiv X^{(1)}(t, \omega), X^{(2)}(t) \equiv X^{(2)}(t, \omega)$ та $X^{(3)}(t) \equiv X^{(3)}(t, \omega), \omega \in \Omega, t \in [t_0, T]$, які задовольняють:

- алгебраїчно-диференціальну модель у формі Іто [6]

$$\begin{cases} X^{(1)}(t)dt = [A_{11}X^{(1)}(t) + A_{12}X^{(2)}(t) + A_{13}X^{(3)}(t)]dt + \\ + B_{11}X^{(1)}(t) + B_{12}X^{(2)}(t) + B_{13}X^{(3)}(t) + Y^{(1)}(t)dt + \\ + \Gamma_{11}d\xi^{(1)}(t) + \Gamma_{12}d\eta^{(1)}(t), \\ X^{(2)}(t)dt = [A_{21}X^{(1)}(t) + A_{22}X^{(2)}(t) + A_{23}X^{(3)}(t)]dt + \\ + B_{21}X^{(1)}(t) + B_{22}X^{(2)}(t) + B_{23}X^{(3)}(t) + Y^{(2)}(t)dt + \\ + \Gamma_{21}d\xi^{(2)}(t) + \Gamma_{22}d\eta^{(2)}(t), \\ X^{(3)}(t)dt = A_{31}X^{(1)}(t) + A_{32}X^{(2)}(t) + A_{33}X^{(3)}(t) - Y^{(3)}(t), t \in [t_0, T], \end{cases} \quad (2)$$

- стохастичні початкові умови

$$X^{(1)}(t_0) = X_0^{(1)} \in S_{t_0}, X^{(2)}(t_0) = X_0^{(2)} \in S_{t_0}, X^{(3)}(t_0) = X_0^{(3)} \in S_{t_0}. \quad (3)$$

Модель (2) запишемо в векторно-матричній формі

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \\ X^{(3)}(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \\ X^{(3)}(t) \end{pmatrix} dt + \\
& + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^{(1)}(t) \\ dX^{(2)}(t) \\ dX^{(3)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y^{(1)}(t) \\ Y^{(2)}(t) \\ -Y^{(3)}(t) \end{pmatrix} dt + \\
& + \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi^{(1)}(t) \\ d\xi^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta^{(1)}(t) \\ d\eta^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [t_0, T].
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут у

- матриці $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ у третьому ря-

дку перший 0 є нульова матриця розмірності $(l \times n)$, другий нуль – нульова матриця розмірності $(l \times m)$, а третій нуль – нульова матриця розмірності $(l \times l)$;

- у матриці $\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в першому ря-

дку перший нуль нульова матриця розмірності $(n \times m)$, другий нуль – нульова матриця $(n \times l)$; у другому рядку перший нуль – нульова матриця розмірності $(m \times n)$, другий нуль – нульова матриця розмірності $(m \times l)$; у третьому рядку перший нуль – нульова матриця розмірності $(l \times n)$, другий нуль – нульова матриця розмірності $(l \times m)$, а третій нуль – нульова матриця розмірності $(l \times l)$;

- у матриці $\begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в першому ря-

дку перший 0 нульова матриця розмірності $(n \times m)$,

другий нуль – нульова матриця розмірності $(n \times l)$; у другому рядку перший нуль – нульова матриця $(m \times n)$, другий нуль – нульова матриця розмірності $(m \times l)$; у третьому рядку перший нуль – нульова матриця $(l \times n)$, другий нуль – нульова матриця розмірності $(l \times m)$, а третій нуль – нульова матриця розмірності $(l \times l)$;

- у вектора $\begin{pmatrix} d\xi^{(1)}(t) \\ d\xi^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль є нульовим ве-

ктором розмірності l ;

- у вектора $\begin{pmatrix} d\eta^{(1)}(t) \\ d\eta^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль нульовий век-

тор розмірності l .

Агрегуємо модель (4) цінами $(n \times m \times l)$ еколого-економічних продуктів у один об'єднаний агрегований еколого-економічний продукт [3]. Нехай

$q^{(1)} = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})'$ – вектор цін на основну про-

дукцію, $q^{(2)} = (q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)})'$ – вектор цін на допо-

міжну продукцію, а $q^{(3)} = (q_1^{(3)}, \dots, q_l^{(3)})'$ – вектор

тарифів (вартості) знищення одиниць забруднювачів.
Агрегуючий вектор рядок цін

помножимо зліва на ліву та праву частини (4), після чого матимемо рівність

$$q' = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}, q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)}, q_1^{(3)}, \dots, q_l^{(3)})$$

$$\begin{aligned} q' \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \\ X^{(3)}(t) \end{pmatrix} dt &= q' \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \\ X^{(3)}(t) \end{pmatrix} dt + \\ &+ q' \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^{(1)}(t) \\ dX^{(2)}(t) \\ dX^{(3)}(t) \end{pmatrix} + q' \begin{pmatrix} Y^{(1)}(t) \\ Y^{(2)}(t) \\ Y^{(3)}(t) \end{pmatrix} dt + \\ &+ q' \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi^{(1)}(t) \\ d\xi^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + q' \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta^{(1)}(t) \\ d\eta^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко переконатись, що агрегована модель (5) на- продукт)
буває вигляду (на цінах представляється як один

$$x(t)dt = \alpha x(t)dt + \beta dx(t) + ydt + \gamma d\xi(t) + \mu d\eta(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (6)$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \end{pmatrix} - \text{агрегована еколого-економічна величина випуску,}$$

$$y = \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \\ -Y^{(3)} \end{pmatrix} - \text{агрегована величина кінцевої еколого-економічної продукції,}$$

α – коефіцієнт прямих матеріальних витрат,

β – коефіцієнт фондомісткості,

$$\gamma - \text{коефіцієнт при вінерівському процесі } (\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \text{вінерівський процес}),$$

$$\mu - \text{коефіцієнт при пуассонівському процесі } (\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta^{(1)}(t) \\ \eta^{(2)}(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \text{пуассонівський процес}).$$

Це пов'язано з тим, що баланс за масою однозначно відображається балансом за вартістю.

Порівняння рівнянь (5) і (6) дозволяє уточнити умови точного агрегування цінами

$$\begin{aligned} q' \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} &= \alpha q', \quad q' \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \beta q' \\ q' \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \gamma q', \quad q' \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu q' \end{aligned} \quad (7)$$

або

$$\begin{aligned} q' \left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} - \alpha E_{n+m+l} \right] &= 0, \\ q' \left[\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \beta E_{n+m+l} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

E_{n+m+l} – одинична матриця розмірності $(n+m+l) \times (n+m+l)$,

$$\begin{aligned} q' \left[\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= 0, \\ q' \left[\begin{pmatrix} \Gamma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

E_n – одинична матриця розмірності $(n+n)$,

E_m – одинична матриця розмірності $(m+m)$.

Аналіз рівностей (7)-(9) підтверджує, що умова використання лівих векторів Фробеніуса $(q'_A = q'_B = q'_{\Gamma_1} = q'_{\Gamma_2})$

матриць

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ є умовою}$$

точного агрегування цінами моделі (4). Зазначимо, що $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ – корені Фробеніуса матриць A, B, Γ_1, Γ_2 . Шукані ліві вектори Фробеніуса $q_A, q_B, q_{\Gamma_1}, q_{\Gamma_2}$ є власними векторами, що відповідають власним значенням $\lambda_A = \alpha > 0$, $\lambda_B = \beta > 0$, $\lambda_{\Gamma_1} = \gamma \in \square$, $\lambda_{\Gamma_2} = \mu \in \square$ для транспонованих матриць A, B, Γ_1, Γ_2 . Таким чином, модель (6) є найпростішою агрегованою стохастичною моделлю відтворення суспільного продукту з урахуванням процесів переробки забруднювачів (введення додаткового виробництва) та виробництва

додаткової продукції. До агрегованого рівня (6) запишемо початкову умову

$$x(t_0) = x_0 \in S_{t_0} \quad (x_0 > 0). \quad (10)$$

За керування візьмемо відносний обсяг виробничого нагромадження

$$u(t) = \frac{\beta dx(t)}{\beta dx(t) + y(t)dt}, \quad t \in [t_0, T] \quad (11)$$

із обмеженням

$$0 \leq u(t) \leq u_1 \leq 1, \quad t \in [t_0, T]. \quad (12)$$

Із урахуванням (11) диференціальна модель (6) набуває вигляду

$$dx(t) = \beta^{-1}(1 - \alpha)u(t)x(t)dt - \gamma\beta^{-1}u(t)d\tilde{\xi}(t) - \mu\beta^{-1}u(t)d\tilde{\eta}(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (13)$$

За критерій мети візьмемо максимізацію середньої продукції y на відрізку часу $[t_0, T]$ інтегральної дисконтированої агрегованої кінцевої

$$M \int_{t_0}^T ke^{-\delta(t-t_0)} y(t)dt = M \int_{t_0}^T ke^{-\delta(t-t_0)} \frac{1-u(t)}{u(t)} \beta dx(t) \rightarrow \max_u, \quad (14)$$

де $k > 0$ – деяка стала,

M – математичне сподівання.

Визначимо $Mdx(t)$. Для цього використаємо властивості віневірського та пуассонівського процесів

$$Md\xi(t) = 0, \quad Md\eta(t) = d(M\eta(t)) = d(\rho(t-t_0)) = \rho. \quad (15)$$

Застосуємо до лівої та правої частин моделі (13) властивості (15), одержимо середню агреговану математичне сподівання M та використаємо модель

$$\beta Mx(t) = (1 - \alpha)u(t)Mx(t)dt - \mu\rho u(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (16)$$

Підставимо (16) у критерій мети (14), одержимо

$$M \int_{t_0}^T ke^{-\delta(t-t_0)} \frac{1-u(t)}{u(t)} \beta dx(t) = M \int_{t_0}^T ke^{-\delta(t-t_0)} (1-u(t)) \times \\ \times [(1 - \alpha)x(t) - \mu\rho] dt \rightarrow \max_u. \quad (17)$$

Задача (12)-(13), (17) у математичному плані є задачею стохастичного оптимального керування, в якій керуванням виступає відносний обсяг виробничого нагромадження U , а фазовою траєкторією – агрегована величина валового випуску продукції X . Для її

- рівняння Беллмана

дослідження використаємо стохастичні умови оптимальності [7].

Дослідження стохастичної моделі

За стохастичними достатніми умовами оптимальності необхідно знайти найменше значення функції багатьох змінних при крайовій умові:

$$\inf_u R(t, x, u, V) \equiv \inf_u \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} (1 - \alpha) \beta^{-1} u x + 0,5 \gamma^2 \beta^{-2} u^2 \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \rho [V(t, x - \mu \beta^{-1} u) - V(t, x)] - k e^{-\delta(t-t_0)} (1 - u) [(1 - \alpha) x - \mu \rho] \right\} = 0, \quad (18)$$

- крайова умова

$$V(T, x(T)) = 0, \quad (19)$$

де невідома функція V – неперервно-диференційовна один раз по t та двічі по x на декартовому добутку $[t_0, T] \times \{x \geq 0\}$ та яку будемо шукати у вигляді

$$V(t, x) = e^{-\delta(t-t_0)} r x^2(t) - e^{-\delta(t-t_0)} r x^2(T), \quad t \in [t_0, T], \quad (20)$$

тут r – постійна та яка підлягає вибору. Підставимо (20) у рівняння Белмана (18). Визначимо похідну по u від R

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \{2r(1 - \alpha) \beta^{-1} x^2 + 2r \gamma^2 \beta^{-2} u - 2\rho r(x - \mu \beta^{-1} u) \mu \beta^{-1} + \\ + k[(1 - \alpha) x - \mu \rho]\} e^{-\delta(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T].$$

Якщо $\frac{\partial R}{\partial u} > 0$, то функція R є монотонно зростаючою по u та найменшого значення на $[0, u_1]$ одержує при $u^{(1)} = 0$. А при $\frac{\partial R}{\partial u} < 0$ – функція R монотонно спадає по u та найменшого значення на $[0, u_1]$ отримує при $u^{(2)} = u_1$. Рівність $\frac{\partial R}{\partial u} = 0$ є необхідною умовою оптимальності функції R по u :

$$2\beta^{-1} r (1 - \alpha) x^2 + 2r \beta^{-2} u (\gamma^2 + \rho \mu^2) + x[(1 - \alpha) k - 2r \rho \mu \beta^{-1}] - k \mu \rho = 0. \quad (21)$$

Запишемо рівняння Белмана (18)

$$-\delta r x^2 + 2r \beta^{-1} (1 - \alpha) u x^2 + r \gamma^2 \beta^{-2} u^2 + \\ + \rho [-2\mu r \beta^{-1} u x + r \mu^2 \beta^{-2} u^2] - k(1 - u) [(1 - \alpha) x - \mu \rho] = 0. \quad (22)$$

Отримали систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (21)-(22) для визначення керування u .

Із рівняння (21) визначимо u :

$$u(t) = 2^{-1} r^{-1} \beta^2 (\gamma^2 + \rho \mu^2)^{-1} \{k \mu \rho - 2\beta^{-1} r (1 - \alpha) x^2 - \\ - x[(1 - \alpha) k - 2r \rho \mu \beta^{-1}]\} \quad (23)$$

та підставимо (23) у (22) одержимо рівняння для визначення x

$$-\delta r x^2 + \beta (\gamma^2 + \rho \mu^2) \{ (1 - \alpha) x^2 - \mu \rho x + k[(1 - \alpha) x - \mu \rho] \} \times \\ \times \{ k \mu \rho - 2\beta^{-1} r (1 - \alpha) x^2 - x[(1 - \alpha) k - 2r \rho \mu \beta^{-1}] \} - k[(1 - \alpha) x - \mu \rho] + \\ + 4^{-1} r^{-1} \beta^2 (\gamma^2 + \mu^2 \rho)^{-1} \times \{ k \mu \rho - 2\beta^{-1} r (1 - \alpha) x^2 - x[(1 - \alpha) k - 2r \rho \mu \beta^{-1}] \}^2 = 0 \quad (24)$$

При кожному $t \in [t_0, T]$ одним із числових методів (метод дотичних, одним із варіантів градієнтних методів) [5,6] можна визначити $x_{OB}(t)$ із рівняння

(24) та підставити $x = x_{OB}(t)$ у рівняння (23) і тим самим знайти керування $u^{(3)}(t)$, $t \in [t_0, T]$. А

вибором постійної r домогтися, щоб $u^{(3)}$ належало проміжку $(0, u_1)$.

Слід зазначити, що можна скористатися іншим шляхом. Із рівнянь (21) і (22) визначити X^2 та відняти ліві і праві частини рівнянь, із отриманого рівняння визначити X та підставити в рівняння (21) або (22) й отримати рівняння залежне від U . А до цього рівняння при розв'язуванні можна застосувати більш прості методи: метод ділення відрізка навпіл, метод хорд, метод «золотого перерізу», метод чисел Фібоначчі.

Таким чином, визначимо три керування – три одноярусні еколого-економічні режими:

а) $u^{(1)} = 0$ – відсутність відносного обсягу виробничого нагромадження;

б) $u^{(2)} = u_1$ – повний обсяг виробничого нагромадження;

в) $u^{(3)}(t)$ – частковий відносний обсяг виробничого нагромадження.

Із одноярусних еколого-економічних режимів можна формувати багатоярусні режими ($p \geq 2$):

- двоярусні: повний+відсутній, частковий+відсутній та інші;

- трьохярусні: повний+частковий+відсутній та

інші;

- чотирьохярусні: повний+частковий+відсутній+повний та інші;

- багатоярусні.

Вибраному багатоярусному режиму ставиться у відповідність багатоярусний еколого-економічний процес:

- для двоярусного: лівий та правий процеси,

- для багатоярусного: лівий, серединні та правий процеси.

Кожен процес складається з керування (відповідає режиму) та відповідної траєкторії.

Виберемо двоярусний еколого-економічний режим повний+відсутній і побудуємо для нього двоярусний оптимальний процес, а для інших багатоярусних еколого-економічних режимів побудова проводиться аналогічно.

Спершу побудуємо усереднений двоярусний оптимальний процес.

Лівий процес. Ліве керування відповідає першому двоярусному режиму повний, тобто

$u_{лів}(t) = u^{(2)} = u_1$, а праве керування відповідає другому двоярусному режиму відсутній – $u_{пр}(t) = u^{(1)} = 0$.

Відповідна усереднена ліва траєкторія визначається із усередненої задачі Коші

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &\equiv \dot{x}(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u_1x(t) - \mu\beta^{-1}u_1\rho, t \in [t_0, T], \\ x(t_0) &= Mx^{(0)} \end{aligned} \quad (25)$$

та розв'язок набуває вигляду

$$\begin{aligned} x_{лів}^{(yc)}(t) &= Mx^{(0)}e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_1(t-t_0)} - \mu\beta^{-1}\rho u_1 \times \\ &\times \int_{t_0}^t e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_1(t-z)} dz = Mx^{(0)}e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_1(t-t_0)} + \frac{\mu\rho}{1-\alpha} \left(1 - e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_1(t-t_0)}\right) = \\ &= \left(Mx^{(0)} - \frac{\mu\rho}{1-\alpha}\right)e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_1(t-t_0)} + \frac{\mu\rho}{1-\alpha}, t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (26)$$

Оскільки $x^{(0)}$, u_1 , ρ є векторами розмірності $u_{пр}^{(t)} = 0$ визначається з сумарного рівняння $(n \times m \times l)$, то момент перемикання ζ за усередненого Беллмана (18)

ною лівою траєкторією $x_{лів}^{(yc)}(t)$ і правим керуванням

$$\sum_{i=1}^{n+m+l} \left\{ \delta r x_{i,лів}^{(yc)} + k \left[(1-\alpha)x_{i,лів}^{(yc)} - \mu\rho \right] \right\} = 0, \zeta \in (t_0, T) \quad (27)$$

$$\text{де } x^{(0)} = \left(x_{10}^{(1)}, \dots, x_{n0}^{(1)}, x_{10}^{(2)}, \dots, x_{m0}^{(2)}, x_{10}^{(3)}, \dots, x_{l0}^{(3)} \right)', u_1 = \left(u_{11}^{(1)}, \dots, u_{n1}^{(1)}, u_{11}^{(2)}, \dots, u_{m1}^{(2)}, u_{11}^{(3)}, \dots, u_{l1}^{(3)} \right)',$$

$$\rho = \left(\rho_1^{(1)}, \dots, \rho_n^{(1)}, \rho_1^{(2)}, \dots, \rho_m^{(2)}, \underbrace{0, \dots, 0}_l \right)'.$$

Нелінійне рівняння (27) можна розв'язати одним із числових методів [9, 10]: метод ділення відрізка навіпіл, метод хорд, метод дотичних, метод «золотого» перерізу, метод Фібоначчі, градієнтний метод. Причому, вибором постійної r можна домогтися, щоб $\zeta \in (t_0, T)$.

Якщо момент ζ рівняння (27) не існує або $\zeta \notin (t_0, T)$, то необхідно перейти до вибору послідовуючого еколого-економічного режиму.

Отримано усереднений лівий процес

$$\left\{ x_{\text{лів}}^{(yc)}(t), u_{\text{лів}}(t) = u^{(2)} = u_1, t \in [t_0, \zeta] \right\}.$$

Правий процес. Усереднена права траєкторія визначається з задачі Коші при правому керуванні

$$u_{\text{пр}}(t) = u^{(1)} = 0, \quad \dot{x}(t) = 0, \quad t \in [\zeta, T],$$

$$x(\zeta) = x_{\text{лів}}^{(yc)}(\zeta)$$

та розв'язок має вигляд $x_{\text{пр}}^{(yc)}(t) = x_{\text{лів}}^{(yc)}(\zeta)$, $t \in [\zeta, T]$.

Одержали усереднений правий процес

$$\left\{ x_{\text{пр}}^{(yc)}(t) = x_{\text{лів}}^{(yc)}(\zeta), u_{\text{пр}}(t) = u^{(1)} = 0, t \in [\zeta, T] \right\}.$$

Усереднений двоярусний оптимальний процес є усереднених лівого та правого процесів склейкою в момент перемикавання керувань ζ

$$x_{\text{он}}^{(yc)}(t) = \begin{cases} x_{\text{лів}}^{(yc)}(t), & t \in [t_0, \zeta], \\ x_{\text{пр}}^{(yc)}(t), & t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad u_{\text{он}}(t) = \begin{cases} u_{\text{лів}}(t), & t \in [t_0, \zeta], \\ u_{\text{пр}}(t), & t \in [\zeta, T]. \end{cases}$$

Виходить, що двоярусне оптимальне керування $u_{\text{он}}(t)$ є кусково-неперервною функцією на $[t_0, T]$, а відповідна двоярусна усереднена оптимальна траєкторія $x_{\text{он}}^{(yc)}(t)$ – неперервна та кусково-диференційована функція на $[t_0, T]$.

Двоярусний стохастичний оптимальний процес

$\{x_{\text{он}}(t), u_{\text{он}}(t), t \in [t_0, T]\}$ є склейкою в момент перемикавання керувань ζ стохастичних лівого $\{x_{\text{лів}}(t), u_{\text{лів}}(t) = u_1, t \in [t_0, \zeta]\}$ і правого $\{x_{\text{пр}}(t), u_{\text{пр}}(t) = 0, t \in [\zeta, T]\}$ процесів

$$x_{\text{он}}(t) = \begin{cases} x_{\text{лів}}(t), & t \in [t_0, \zeta], \\ x_{\text{пр}}(t), & t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad u_{\text{он}}(t) = \begin{cases} u_{\text{лів}}(t) = u_1, & t \in [t_0, \zeta], \\ u_{\text{пр}}(t) = 0, & t \in [\zeta, T], \end{cases}$$

де стохастична ліва траєкторія $x_{\text{лів}}(t)$ є розв'язком стохастичної задачі Коші при $u = u^{(2)} = u_1$

$$dx(t) = \beta^{-1}(1 - \alpha)u_1 x(t) dt - \gamma \beta^{-1} u_1 d\zeta(t) - \beta^{-1} \mu u_1 d\eta(t), \quad t \in [t_0, \zeta],$$

$$x(t_0) = x^{(0)},$$
(28)

а стохастична права траєкторія $x_{\text{пр}}(t)$ такої стохастичної задачі Коші при $u = u^{(1)} = 0$

$$dx(t) = 0, \quad t \in [\zeta, T],$$

$$x(\zeta) = x_{\text{лів}}(\zeta),$$

розв'язком якої є

$$x_{np}(t) = x_{nie}(\zeta), t \in [\zeta, T].$$

Стохастичну початкову задачу (28) можна розв'язати одним із числових методів [11]. Зауважимо, що стохастичні початкові задачі звичайними детермінованими методами не інтегруються.

Таким чином, одержали усереднений і стохастичний двоярусний оптимальний процес. Відзначимо, що при побудові багаторусних оптимальних процесів для багаторусних еколого-економічних режимів ($p > 2$) треба визначити лівий, серединні та правий процеси. На стиці цих процесів лівого та першого серединного треба визначити перший момент перемикавання керувань ζ_1 , а на стиці серединних – моменти перемикавань ζ_i , $i = 2, p-2$ та на стиці останнього серединного та правого процесу – правий момент перемикавання керувань $\zeta_{(p-1)}$ та які визначаються аналогічно як для двоярусного режиму. Ліва, серединні та права траєкторії знаходяться із задач Коші (усереднені та стохастичні) при відповідних керуваннях (режимах) $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$.

- вибіркова середня

$$\bar{x}_{on}(t) = N^{-1} \sum_{i=1}^N x_{on}^{(i)}(t), t \in [t_0, T],$$

- вибіркова дисперсія

$$S_{x_{on}}^2 = (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^N \left(x_{on}^{(i)}(t) - \bar{x}_{on}(t) \right)^2, t \in [t_0, T].$$

Слід зауважити, що вибіркова середня $\bar{x}_{on}$ збігається з усередненою оптимальною траєкторією $x_{on}^{(yc)}(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Склеюючи в момент перемикавання керування ζ_1 лівого з першим серединним, в моментах перемикавання ζ_i , $i = 2, p-2$ серединних процесів між собою та в момент перемикавання $\zeta_{(p-1)}$ останнього серединного процесу з правим процесом дають усереднений і стохастичний багаторусний оптимальний еколого-економічний процес.

Отже, для кожного вибраного багаторусного еколого-економічного режиму можна побудувати багаторусний еколого-економічний оптимальний процес, серед яких є можливість вибору пріоритетного багаторусного оптимального процесу.

При стохастичному моделюванні необхідно знати довірчі проміжки реальних значень оптимальних траєкторій за заданою ймовірністю (довірчим рівнем). Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальної траєкторії та отримано N ансамблів траєкторій $x_{on}^{(i)}(t)$, $i = 1, N$, $t \in [t_0, T]$.

Обчислимо вибіркові статистики [12]

Довірчим проміжком для дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимальної траєкторії за заданою ймовірністю $\theta \in (0;1)$ є

$$\left(\frac{(N-1)S_{x_{on}}^2(t)}{\chi_{1-\theta}^2(N-1)} - \text{нижня межа}, \frac{(N-1)S_{x_{on}}^2(t)}{\chi_{\theta}^2(N-1)} - \text{верхня межа} \right), t \in [t_0, T]$$

де $\chi_{1-\theta}^2(N-1)$ і $\chi_{\theta}^2(N-1)$,

θ – квантилі розподілу Пірсона із $(N-1)$ ступенем вільності та відповідно довірчим рівнем $(1-\theta)$ і θ ([12]).

Тоді довірчим проміжком для реального значення оптимальної траєкторії за заданою ймовірністю

$\theta \in (0;1)$ є

$$\left(\bar{x}_{on}(t) - \frac{S_{x_{on}}^{(t)} t_{\theta}(N-1)}{\sqrt{N}} - \text{нижня межа}, \bar{x}_{on}(t) + \frac{S_{x_{on}}^{(t)} t_{\theta}(N-1)}{\sqrt{N}} - \text{верхня межа} \right), t \in [t_0, T],$$

де $t_{\theta}^{(N-1)} - \theta$ – квантиль двостороннього розподілу Ст'юдента з $(N-1)$ ступенями вільності при довірчому рівні θ ([12]).

Таким чином, визначено довірчий проміжок за заданою ймовірністю для реальної оптимальної траєкторії вибраного еколого-економічного режиму.

Висновки:

1. Побудовано стохастичну модель оптимального керування динамікою агрегованої еколого-економічної продукції з введенням допоміжного виробництва по переробці забруднювачів та виробництва допоміжної продукції, проведено її дослідження з допомогою стохастичних достатніх умов оптимальності.

2. Встановлено, що стохастична модель має три керування за відносним обсягом виробничого нагромадження – три еколого-економічні режими для вибору багатоярусних режимів та побудови для них багатоярусних оптимальних еколого-економічних процесів, серед яких є можливість вибору пріоритетного багатоярусного оптимального процесу.

3. За довірчим рівнем (довірчою ймовірністю) визначені довірчі проміжки для реальних багатоярусних оптимальних траєкторій.

Список використаних джерел:

1. Liashenko, O., & Khrushch, L. (2018). Determination of the environmental tax on the basis of modified input-output Leontief-Ford model. *Technology Audit and Production Reserves*, Vol. 3. No. 4(41). Pp. 41–46. DOI: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.133309>
2. Biloskursky, R., Verstiak, A., & Vinnychuk, I. (2019). Sectoral Analysis of Environmental Economics: The View from Ukraine. *Scientific Annals of Economics and Business*, Vol. 66. No. 3. Pp. 321–334. DOI: <https://doi.org/10.47743/saeb-2019-0028>
3. Скрашук Л.В. (2017). Агрегована модель оптимального керування динамікою кінцевої продукції в екологічно збалансованій економіці. *Науковий вісник Чернівецького університету. Економіка*. Чернівці, Вип. 789. С. 77–86. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvchu_ec_2017_789_14
4. Бойчук М.В., Скрашук Л.В. (2020). Стохастична модель оптимального керування динамікою випуску агрегованої еколого-економічної продукції при обмеженні на мінімальну величину незворотності капіталовкладень. *Зб. наук. пр. Економічні науки*. Чернівці, Вип. 16. С. 81–97. URL: <https://archer.chnu.edu.ua/handle/123456789/11432>
5. Бойчук М.В., Семчук А.Р. (2012). Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макро-економіки зростання з урахуванням екологічного фактора. Чернівці: Місто, 208 с.
6. Скороход А.В. (1990). *Лекції з теорії випадкових процесів*: навч. посібник. Київ: Либідь, 168 с.
7. Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В. (2011). Стабілізація у динамічних системах випадкової структури. Чернівці: Золоті литаври, 738 с.
8. Григорків В.С. (2019). *Моделювання економіки: підручник*. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 360 с. URL: <https://emm.cv.ua/modeliuvannia-ekonomiky-pidruch-2019/>
9. Ясинський В.К. (2005). *Основи обчислювальних методів*. Чернівці: Золоті литаври, 398 с.
10. Ярошенко О.І., Григорків М.В. (2018). *Числові методи: навч. посібник*. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 172 с. URL: <https://emm.cv.ua/chuclovi-metody/>
11. Юрченко І.В., Ясинський Л.І., Ясинський В.К. (2007). *Методи стохастичного моделювання систем*. Чернівці: Прут, 416 с.
12. Гур'янова Л.С., Клебанова Т.С., Прокопович С.В. та ін. (2016). *Прикладна економетрика: навч. посіб.*: у 2-х ч. Ч. 1. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 235 с. URL: <https://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/19846>

References:

1. Liashenko, O., & Khrushch, L. (2018). Determination of the environmental tax on the basis of modified input-output Leontief-Ford model. *Technology Audit and Production Reserves*, Vol. 3. No. 4(41). Pp. 41–46. DOI: <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2018.133309> [in English].
2. Biloskursky, R., Verstiak, A., & Vinnychuk, I. (2019). Sectoral Analysis of Environmental Economics: The View from Ukraine. *Scientific Annals of Economics and Business*, Vol. 66. No. 3. Pp. 321–334. DOI: <https://doi.org/10.47743/saeb-2019-0028> [in English].
3. Skrashuk, L.V. (2017). Aghreghovana modelj optymaljnogho keruvannja dynamikoju kincevoji produkciji v ekologichno zbalansovanij ekonomici [Aggregated model of optimal control of the dynamics of final products in an ecologically balanced economy]. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Economics*. Chernivtsi, Iss. 789. Pp. 77–86. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvchu_ec_2017_789_14 [in Ukrainian].
4. Bojchuk, M.V., & Skrashuk, L.V. (2020) Stokhastychna modelj optymaljnogho keruvannja dynamikoju vypusku aghreghovanoji ekologho-ekonomichnoji produkciji pry obmezheni na minimalnu velychynu nezvorotnosti kapitalovkladenj [Stochastic model of optimal control of the dynamics of the output of aggregated ecological and

economic products with a restriction on the minimum value of the irreversibility of capital investments]. Collection of scientific works. Economic sciences. Chernivtsi, Iss. 16. Pp. 81-97. URL: <https://archer.chnu.edu.ua/handle/123456789/11432> [in Ukrainian].

5. Bojchuk, M.V., & Semchuk, A.R. (2012) Modeljuvannja ta optymizacija povnogho cyklu odnoproductovoji makroekonomiky zrostannja z urakhuvannjam ekologichnogho faktora [Modeling and optimization of the full cycle of single-product macroeconomic growth taking into account the environmental factor]. Chernivtsi: Misto, 208 p. [in Ukrainian].

6. Skorokhod, A.V. (1990). Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv [Lectures on the theory of stochastic processes]. Kyjiv: Lybidj. [in Ukrainian].

7. Jasynskyj V.K., Jasynskyj Je.V. & Jurchenko I.V. (2011) Stabilizacija u dynamicnykh systemakh vypadkovoji struktury [Stabilization in dynamic systems of random structure]. Chernivci: Zoloti lytavry. [in Ukrainian].

8. Ghryghorkiv, V.S. (2019) Modeljuvannja ekonomiky [Modeling of the economy]. Chernivci : Chernivecjkij nac. un-t. [in Ukrainian].

9. Iasynskyi, V.K. (2005). Osnovy obchysliuvalnykh metodiv Chernivci [Fundamentals of computational methods]. Chernivci : Zoloti lytavry. [in Ukrainian].

10. Jaroshenko, O.I. & Ghryghorkiv, M.V. (2018) Chyslovi metody: navch. Posibnyk [Numerical methods] : textbook. Chernivtsi: Chernivtsi National University, 172 p. URL: <https://emm.cv.ua/chuclovi-metody/> [in Ukrainian].

11. Iurchenko, I.V., Yasynskyi, L.I., Yasynskyi, & V.K. (2007). Metody stokhastychnoho modeliuvannia system [Methods of stochastic modeling of systems]. Chernivci: Prut. [in Ukrainian].

12. Hurianova, L.S., Klebanova, T.S., Prokopovych, S.V. ta in. (2016). Prykladna ekonometryka [Applied econometrics] : textbook: in 2 parts. Part 1. Kharkiv: KhNEU named after S. Kuznets, 235 p. URL: <https://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/19846> [in Ukrainian].

Дата надходження статті: 03.11.2025 р.

Дата прийняття статті до друку: 21.11.2025 р.